



المدة : ساعتين

إمتحان السداسي الاول

مقياس: التحليل

التمرين الأول:

(I) لتكن A جزء من $\mathbb{R}^-$, غير خال ومحدود مع $sup(A) \neq 0$ و $\frac{1}{A}$ المجموعة المعرفة كما يلي:

$$\frac{1}{A} = \left\{ \frac{1}{x}, x \in A \right\}$$

1. برهن أن: $sup(A) < 0$.

2. برهن أن: $\frac{1}{A}$ محدودة.

3. برهن أن: $sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{inf(A)}$, ثم استنتج أن: $inf\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{sup(A)}$.

(II) لنعرف المجموعة B كما يلي: $B = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$

- عين مع التعليل في حالة وجودها: $inf(B), sup(B), min(B), max(B)$.

التمرين الثاني:

لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين معرفتين كما يلي: $0 < U_0 < V_0$,

$$V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}, n \in \mathbb{N} \text{ و } U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n}, n \in \mathbb{N}$$

1. برهن أن: $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < U_n < V_n$.

2. برهن أن: $\forall n \in \mathbb{N}: V_{n+1} - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (U_0 - V_0)$.

3. أثبت أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متقاربتين ثم استنتج انهما متقاربتين نحو نفس النهاية l .

التمرين الثالث:

1. أحسب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{E(x)}{E(2x)} \right)$.

2. باستعمال تعريف النهاية بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-(n+1)^2) = -\infty$.

3. أدرس طبيعة السلاسل التالية:

$$\sum_{n \geq 1} n^{-2} \times \cos(n) \quad \sum_{n \geq 0} \left(\frac{n+a}{n+b} \right)^{n^2}, a, b \in \mathbb{R} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n} \right)^n = e^k \text{ تعطى} \right).$$

التمحيص التمويجي لإمتحان السداسي الأول

بالقلب: $\forall x \in A: x \geq \frac{1}{\sup(A)}$

إذن: $\frac{1}{\sup(A)}$ حاد من الأسفل لعناصر

المجموعة A ونعني أن: $\inf(A)$ هو أكبر

الحواد العليا فإن: $\inf(A) \geq \frac{1}{\sup(A)}$

بالقلب: $\sup(A) \geq \frac{1}{\inf(A)}$... ②

من ① و ② نستنتج أن:

$\sup(A) = \frac{1}{\inf(A)}$ ①

- استنتاج أن: $\inf(A) = \frac{1}{\sup(A)}$

لدينا: $\sup(A) = \frac{1}{\inf(A)}$

أي: $\inf(A) = \frac{1}{\sup(A)}$ ②

حيث A جزء غير خال من $\mathbb{R}^+$ ومحدود مع $\sup(A) \neq 0$ أي $\frac{1}{A}$ جزء غير خال من

$\mathbb{R}^+$ ومحدود مع $\sup(\frac{1}{A}) \neq 0$ فإن

المساواة يتحقق صراحة إذا استبدلنا A

بـ $\frac{1}{A}$ أي: $\inf(\frac{1}{A}) = \frac{1}{\sup(A)}$

التمرين 01 - 06

I. 1- البرهان أن: $\sup(A) < 0$

نما أن: $A \subset \mathbb{R}^-$ فإن: $\forall x \in A: x \leq 0$ إذن 0 حاداً أعلا لـ A وبالتالي فإن:

$\sup(A) < 0$ ⑤

2- البرهان أن: $\frac{1}{A}$ محدودة:

لدينا A محدودة وممتلئة:

$\forall x \in A: \inf(A) \leq x \leq \sup(A)$

بالقلب: $\forall x \in A: \frac{1}{\sup(A)} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\inf(A)}$

①

ومنه فإن $\frac{1}{A}$ محدودة أي يوجد:

$\sup(\frac{1}{A})$ و $\inf(\frac{1}{A})$

3- البرهان أن: $\sup(\frac{1}{A}) = \frac{1}{\inf(A)}$

نحتاج أن نبرهن المساواة يكفي أن نبين أن:

$\sup(\frac{1}{A}) \leq \frac{1}{\inf(A)}$

المترابطة الأولى: $\sup(\frac{1}{A}) \leq \frac{1}{\inf(A)}$ ②

لدينا: $\forall x \in A: \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\inf(A)}$ ①

نما أن: $\frac{1}{A}$ محدودة فإن $\sup(\frac{1}{A})$ هو أصغر الحواد العليا إذن:

$\forall x \in \frac{1}{A}: \sup(\frac{1}{A}) \leq \frac{1}{\inf(A)}$... ①

المترابطة الثانية: $\sup(\frac{1}{A}) \geq \frac{1}{\inf(A)}$

لدينا $\frac{1}{A}$ محدودة وممتلئة:

$\forall x \in \frac{1}{A}: \frac{1}{x} \leq \sup(\frac{1}{A})$

$$u_{n+1} < v_{n+1} \quad \text{وبالتالي} =$$

من ① و ② وحسب مبدأ البرهان بالتراجع

$$\forall n \in \mathbb{N}: 0 < u_n < v_n \quad \text{فإن} =$$

2- البرهان آت =

$$\forall n \in \mathbb{N}: v_{n+1} - u_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (u_0 - v_0)$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \quad \text{لدينا} =$$

$$= \frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} \times \frac{u_n - v_n}{2}$$

$$0 < u_n < v_n \quad \text{فإن} =$$

$$0 < u_n - v_n < v_n + u_n \quad \text{فإن} =$$

$$\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} < 1 \dots \times \frac{u_n - v_n}{2}$$

$$\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} < \frac{u_n - v_n}{2} \quad \text{إذا} =$$

$$< \frac{1}{2} (u_n - v_n)$$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^2 (u_{n-1} - v_{n-1})$$

$$< \dots$$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-k+1} (u_0 - v_0)$$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (u_0 - v_0)$$

3/ إثبات أن (u_n) و (v_n) متقاربتان =

نذكر من الرتبة =

$$* \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{2u_n v_n - u_n^2 - u_n v_n}{u_n + v_n}$$

$$= \frac{u_n (v_n - u_n)}{u_n + v_n} > 0$$

ومن هنا فإن (u_n) متزايدة عالمياً

$$B = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}^* \right\} \quad \text{II -}$$

$$p, q \in \mathbb{N}^* = \text{لدينا} =$$

$$p \geq 1 \text{ و } q \geq 1 \quad \text{معنا} =$$

$$\frac{1}{p} < 1 \text{ و } \frac{1}{q} < 1 \quad \text{بالقلب} =$$

$$0 < \frac{1}{p} < 1 \text{ و } 0 < \frac{1}{q} < 1 \quad \text{أي} =$$

$$0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 2 \quad \text{بالجمع} = \text{0178}$$

ومن هنا فإن B محدودة =

$$\inf(B) = 0 \notin B \Rightarrow \min \neq$$

$$\sup(B) = 2 \in B \Rightarrow \max(B) = 2$$

التعريف 0.8 = 1

$$\forall n \in \mathbb{N}: 0 < u_n < v_n \quad \text{1- البرهان آت} =$$

من أجل $n=0$ = لدينا هذا المعطيات =

$$\forall n \in \mathbb{N}: 0 < u_n < v_n \quad \text{فإن} = \text{018}$$

من أجل $n > 0$ = نقرن صحة $P(n)$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي سنبين =

$$\forall n \in \mathbb{N}: 0 < u_{n+1} < v_{n+1} \quad \text{فإن} =$$

$$0 < u_n < v_n \quad \text{لدينا} =$$

$$u_n > 0 \text{ و } v_n > 0 \quad \text{أي} =$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} > 0 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0 \end{cases} \quad \text{لاحظ} =$$

ولدينا أيضاً = 115

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$

$$= \frac{(u_n + v_n)^2 - 2u_n v_n}{2(u_n + v_n)}$$

$$= \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} > 0$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} > 0 \quad \text{ومن هنا} =$$

حل التمرين 03

حساب النهاية

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(n)}{E(2n)} = ?$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}; E(k\alpha) \geq k E(\alpha) \quad \text{نعلم أن:}$$

$$E(2\alpha) \geq 2 E(\alpha) \quad \text{بإذن:}$$

$$E(\alpha) \times \dots \frac{1}{E(2\alpha)} \leq \frac{1}{2 E(\alpha)} \quad \text{بالقلب:}$$

$$\frac{E(\alpha)}{E(2\alpha)} \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

بإذن حسب قاعدة المقارنة فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(n)}{E(2n)} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

2- باستعمال تعريف النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [-(n+1)^2] = -\infty$$

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow U_n < -A$$

$$-(n+1)^2 < -A$$

$$(n+1)^2 > A$$

$$n+1 > \sqrt{A}$$

$$n > \sqrt{A} - 1$$

$$[\sqrt{A} - 1] < \sqrt{A} - 1 < [\sqrt{A} - 1] + 1 \quad \text{نعلم أن:}$$

$$N = [\sqrt{A} - 1] + 1 \quad \text{يكفي أخذ:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [-(n+1)^2] = -\infty \quad \text{وبالتالي:}$$

3- دراسة طبيعة المتسلسلة

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n+a}{n+b} \right)^{n^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

نستعمل معيار كوشي.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+a}{n+b} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+a}{n+b} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n(1+\frac{a}{n})}{n(1+\frac{b}{n})} \right]^n$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{v_n + v_n}{2} - v_n$$

$$= \frac{v_n - v_n}{2} < 0 \quad (018)$$

ومن ثم (v_n) متناقصة تمامًا.

من جهة أخرى لدينا:

$$v_0 < v_n < v_n < v_0 \quad (0178)$$

بما أن (v_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ v_0 فإن المتسلسلة (v_n) متقاربة نحو l .

- و (v_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بـ v_0 فإن المتسلسلة (v_n) متقاربة نحو l .

■ استنتاج أنهما متقاربتان نحو نفس

النهاية =

يكفي أن نبين أنهما متجاورتان لدينا من السابق.

الشرط ①: (v_n) متزايدة و (v_n) متناقصة (015)

الشرط ②: ليبرون أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 0$

$$\text{لدينا: } 0 < v_{n+1} - v_{n+1} < v_n - v_n < \dots$$

$$< \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} (v_0 - v_0) \quad (0178)$$

$$0 < v_{n+1} - v_n < \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} (v_0 - v_0) \quad \text{بإذن:}$$

$$0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} (v_0 - v_0) \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 0$$

منه ① و ② نستنتج أن (v_n) و (v_n) متجاورتان وبالتالي فإنهما متقاربتان نحو نفس النهاية (0128)

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n} = \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

نميز 3 حالات: 2.

• $e^{a-b} > 1 = e^0 \Rightarrow a-b > 0 \Rightarrow a > b$
فالسلسلة متباعدة

• $e^{a-b} < 1 = e^0 \Rightarrow a < b$
فالسلسلة متقاربة

• $a = b \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 1$ = السلسلة

② $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} \omega(n)$

$|u_n| = |n^{-2} \omega(n)|$

$|n^{-2}| = \frac{1}{n^2}$

18

نعلم أن $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة لأنها

سلسلة ريمان ($\alpha = 2 > 1$) وحسب قاعدة

المقارنة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} \omega(n)$

متقاربة مطلقاً وبالتالي فهي متقاربة

انتهى